

MODELO DE ESTIMACIÓN DE COSTES PARA TOLERANCIAS DE DISEÑO EN LA INGENIERÍA DE LOS PROCESOS DE PRODUCCIÓN

Alfredo Sanz-Lobera

Departamento de Materiales y Producción Aeroespacial. ETSI Aeronáuticos UPM

José Manuel Arenas

Departamento de Expresión Gráfica Industrial. EUITI Industrial UPM

Miguel Ángel Sebastián

Departamento de Ingeniería de Construcción y Fabricación. ETSI Industriales UNED

Abstract

The availability of cost-tolerance curves is an item of great interest in the general field of engineering projects and in the particular field of engineering production processes. Both, initial stages of project planning and product design of individual production processes included in the project, require the attainment of certain margins in product specifications and these margins or tolerances carry a cost. The cost is greater the lower in the permissible range, so the knowledge of a reliable enough estimation of the costs associated with each range of tolerance is a useful tool that the project engineers must have at their disposal. Despite their interest, cost-tolerance curves are handled less frequently than would be desirable, due to the strong interdependence between the cost-tolerance curves and the space-time location of the required resources. This study proposes a method for the establishment of a cost estimation model for tolerances of production processes in project engineering, based on the variability derived from resources involved in each process. In other words, the proposed method is based on the ability of a specific process to achieve performance within the tolerances assigned at the materialized magnitude.

Keywords: *cost; tolerance; production process*

Resumen

La disponibilidad los valores coste-tolerancia de un proceso de producción es un aspecto de interés desde el punto de vista de la Ingeniería de Proyectos en general y de la Ingeniería de Procesos de Producción en particular. Tanto en la fase de planificación de un proyecto como en las etapas de diseño de cada uno de los procesos de producción que posibilitarán su ejecución, las especificaciones del producto deben estar contenidas en un intervalo de tolerancia cuyo coste de obtención es tanto mayor cuanto menor es el margen de variación admisible. Por este motivo, el conocimiento del coste asociado a cada tolerancia es una herramienta de gran utilidad para el ingeniero de proyectos. A pesar de su interés, las curvas de coste-tolerancia se manejan con menor profusión de la que sería deseable, dada la gran interdependencia existente entre ellas y la localización espacio-temporal de los recursos a las que se asignan. El presente trabajo propone un método que permite establecer una relación coste-tolerancia a los procesos de producción de la Ingeniería de Proyectos, basada de la variabilidad derivada de los recursos de cada proceso.

Palabras clave: *coste; tolerancia; procesos de producción*

1. Introducción

La relación existente entre los costes de producción y las especificaciones del producto es un aspecto que ha sido largamente estudiado en el ámbito de la Ingeniería de Proyectos y de la Ingeniería de Procesos de Producción y que previsiblemente seguirá siéndolo debido a las importantes connotaciones económicas que conlleva. Este hecho pone de manifiesto que los procedimientos de evaluación y asignación de costes no son todo lo correctos que deberían cuando se intentan aplicar a las situaciones prácticas habituales en las plantas de producción. En este trabajo se consideran los costes derivados de las operaciones de producción de piezas sobre las que se realizan procesos, subdivididos en operaciones con las que se alcanzan los valores de las propiedades físico-químicas preestablecidos en el diseño.

La validez final del producto se consigue cuando se alcanzan todas y cada una de las especificaciones individuales establecidas en el diseño. En algunos casos estas especificaciones son independientes, mientras que en otros, como pueda ser el de los montajes mecánicos, existe o puede existir una interrelación entre algunas de las especificaciones. En este último supuesto, la mayoría de los trabajos que manejan relaciones coste-tolerancia en procesos de producción (Kusiak & Feng, 1995), persiguen la optimización de los costes a partir de una síntesis de tolerancias, es decir, repartiendo la tolerancia global del conjunto o montaje final entre las tolerancias individuales de las piezas elementales que lo constituyen a fin de reducir el coste. Cada una de estas piezas elementales posee su correspondiente relación coste-tolerancia individualizada para una única especificación, que produce una contribución al coste total de la pieza en función de la tolerancia asignada mediante la síntesis. Cuando las especificaciones son independientes no es posible aplicar un proceso de síntesis, aunque el coste final se obtiene sumando los costes individuales de cada una de las etapas del proceso de producción.

Aunque el conocimiento de la relación coste-tolerancia individualizada es un dato de partida esencial para poder aplicar los modelos propuestos en dichos trabajos, la gran mayoría de los modelos implementados centran su atención en los algoritmos de reparto de la tolerancia global, sin prestar apenas atención a su determinación o bien dando por sentado el conocimiento de sus valores o de sus expresiones matemáticas en la forma $C = C(T)$, donde C representa el coste de producción de una pieza y T la amplitud del intervalo de tolerancia asociado a dicho coste de producción. Como consecuencia de este planteamiento los resultados teóricos que se alcanzan son conceptualmente interesantes, aunque adolecen de una aplicabilidad práctica muy reducida. El hecho de dar por sentado el conocimiento de la curva $C = C(T)$ es una tendencia que se ha mantenido desde los primeros desarrollos realizados sobre el tema. Así, por ejemplo, Speckhart (1972) estableció como primer paso de su modelo la necesidad de disponer de una relación coste-tolerancia individualizada para cada especificación. Para ello propuso una expresión de la forma $C = a_0 + a_1 \exp(a_2 T)$, donde C representaba el coste unitario para la producción de una pieza, T representaba la amplitud del intervalo de tolerancia de la especificación considerada y a_0 , a_1 y a_2 eran parámetros obtenidos mediante regresión a partir de los datos de producción de piezas con diferentes tolerancias obtenidos a través de registros históricos. De manera análoga, Spotts (1973) propuso una expresión de la forma $C = a_0 + a_1/T^2$, donde C , T , a_0 y a_1 tenían un significado análogo al caso anterior. Aunque con posterioridad se han propuesto otras expresiones matemáticas diferentes (Dong, Hu & Xue, 1994) algunas de las cuales han sido recopiladas por Chase (Chase *et al* 1990), el planteamiento inicial de Speckhart o Spotts se ha mantenido y continúa siendo utilizado en trabajos más recientes (Hsieh, 2006). En todos los casos mencionados se presupone una disponibilidad de datos que permite la determinación de los parámetros que definen la curva coste-tolerancia de cada modelo sin prestar demasiada atención a la accesibilidad y fiabilidad de los mismos. El resultado conduce a expresiones matemáticas de naturaleza empírica cuya utilización no queda

debidamente justificada. En la Tabla 1 se recogen de forma resumida algunos de modelos de curvas coste-tolerancia propuestos por diferentes autores. Puede observarse que desde el año 1994 no aparece ninguna nueva propuesta para la determinación de relación coste-tolerancia en el proceso y que la mayoría de los modelos son de los años 80 o incluso anteriores. Los trabajos más recientes relacionados con el tema publicados desde entonces como puedan ser los realizados por Diplaris & Sfantsikopoulos (2000) o Etienne *et al* (2007) se han basado en algunos de los modelos previamente definidos.

Tabla 1. Modelos previos de curvas de coste-tolerancia

1 ^{er} Autor	Bennett	Speckhart	Spotts	Sutherland	Michael	Chase	Dong
$C(T) =$	$a_0 T^{a_1}$	$a_0 e^{a_1 T}$	$a_0 T^{-2}$	$a_0 + a_1 T^{a_2}$	$a_0 T^{a_1} e^{a_2 T}$	$a_0 T^{-1}$	$\sum a_i T^i$
Año	1969	1972	1973/1966	1975	1981	1988	1994

C = Coste, T = Tolerancia, a_0 , a_1 y a_2 = parámetros de ajuste por regresión

Según lo dicho, cuando los modelos propuestos se intentan poner en práctica sobre una realidad productiva concreta distinta de aquella en la que han sido contrastados, su aplicabilidad se reduce de forma muy acusada. La principal causa de este hecho se debe a la dificultad que supone el poder disponer de unos datos de costes suficientemente amplios, fiables, y actualizados. El modelo propuesto en el presente trabajo se fundamenta en el establecimiento de la relación coste-tolerancia individualizada para una única especificación, teniendo en cuenta para ello la variabilidad de los recursos empleados en la producción de las piezas en cada momento. Una de las principales ventajas del método reside en el hecho de no precisar la realización de un ajuste a partir de unos datos que en numerosas ocasiones presentan una disponibilidad reducida (Sanz-Lobera *et al*, 2010).

2. Consideraciones de partida

Antes de plantear el modelo de coste-tolerancia propuesto, resulta conveniente realizar una serie de consideraciones previas al mismo, con el fin de precisar algunos conceptos que permitan aplicar y contrastar el modelo con otros modelos propuestos por diferentes autores.

2.1 Operación elemental de un proceso de producción

Tal y como se indicado, la producción de una pieza consiste en la materialización de unas determinadas propiedades medibles, acordes con una serie de especificaciones de diseño. Estas especificaciones son cuantificadas mediante una serie de magnitudes asociadas y sus correspondientes intervalos de tolerancia. Por lo general, la producción de una pieza suele requerir la definición de varias magnitudes y el cumplimiento de sus tolerancias asociadas, para lo cual, durante el proceso de producción, se van sucediendo una serie de operaciones en las que las propiedades de la pieza van siendo modificadas hasta alcanzar el valor final esperado. Se tiene pues, que cualquier proceso de producción puede ser dividido en una secuencia ordenada de operaciones. Cada operación puede, en principio, hacerse de forma alternativa en varias máquinas, cada una de las cuales tendrá su correspondiente dispersión, y generará su correspondiente coste. En el presente trabajo se considera el nivel de operación previamente descrito a efectos del cálculo de costes, pudiendo entenderse el proceso de producción como una secuencia ordenada de operaciones tal y como queda representado en la figura 1.

Figura 1: Factores que intervienen en una operación elemental



El número y la naturaleza de tales operaciones no están prefijados de antemano para cada proceso ya que, entre otros factores, dependen del transformador que las materialice. En lo sucesivo se asume que la definición de las operaciones que constituyen el proceso de producción se realiza en base a *operaciones elementales*, es decir, operaciones que a lo sumo llevan asociada una especificación y que se realizan en una sola máquina o equipo de producción tal y como muestra la figura 1. Por su parte el diseño establece para cada especificación una determinada magnitud M y su correspondiente amplitud del intervalo de tolerancia T .

2.2 Coste de producción y factores productivos asociados

Llamando c_i al coste de producción imputable a una *operación elemental* (i), el coste de producción de una pieza C , se obtendrá como suma de los costes de las n operaciones necesarias para su obtención, es decir

$$C = \sum_{i=1}^n c_i \quad (1)$$

Cada c_i depende de una serie de factores productivos q_{ij} (factor j para la operación i) que inciden en el resultado de la operación, es decir,

$$c_i = c_i(q_{ij}) \quad (2)$$

Los factores productivos q_{ij} son de muy diversa índole y su contribución al coste no siempre podrá ser expresada como una función matemática conocida, ya que en ellos se incluyen aspectos muy diversos ligados a la operación, tales como puedan ser el tamaño de la serie fabricada, los valores de los parámetros propios de la operación, el consumo energético requerido o los niveles retributivos del personal que la lleva a cabo. La tolerancia T puede ser considerada como uno más de tales factores productivos, de forma tal que siempre existirá un coste de operación c_{i0} aunque la magnitud obtenida en la operación considerada no lleve asociado ningún intervalo de tolerancia.

2.3 Tolerancia y variabilidad de proceso

Tal y como se ha indicado la tolerancia es factor productivo intrínseco (propio de la operación) que interviene en el coste de la operación c_i de una pieza. La tolerancia está directamente ligada con la existencia de una variabilidad en el proceso para la obtención de la magnitud M asociada a dicha tolerancia. En efecto, si la operación no tuviese variabilidad en la obtención de la magnitud M , los resultados obtenidos serían siempre los mismos, se

podrían acomodar a un valor fijado en el diseño, y no habría necesidad de establecer un intervalo de tolerancia. La cuantificación de la variabilidad se realiza midiendo la dispersión de los valores obtenidos en la magnitud M , empleando para ello la desviación típica σ de la población de piezas fabricadas. Si la operación está “bajo control”, es decir, no existen causas especiales de variación, a dicha población se le podrá asociar una determinada función estadística de densidad $f(x)$ y conocer en términos de probabilidad el resultado de la producción de la magnitud M . En la mayor parte de los casos la población normal $N(\mu, \sigma)$ suele elegirse por ser la más acorde a los resultados de los procesos de producción. En cualquier caso, la regla de aplicación prácticamente generalizada establece que un proceso está en control si y sólo si lo están todas las operaciones que lo constituyen.

3. Metodología

Supóngase un proceso que consta de una sola operación ($c_i = c_1 = C$) en la que la especificación de diseño establece una amplitud T del intervalo de tolerancia asociado a la magnitud M obtenida en la operación. Como T es un factor productivo, su valor incidirá en el coste C de la operación. Si se consigue el establecimiento de unas condiciones en las que los restantes factores productivos permanezcan constantes, se puede obtener una relación $C = C(T)$ que exprese el coste de operación en función de la tolerancia. Con independencia de la expresión matemática $C=C(T)$ empleada en el establecimiento la relación coste-tolerancia, la mayoría de los autores coinciden en utilizar funciones tales que cumplan algunas de las siguientes condiciones

$$T_A > T_B \Rightarrow C(T_A) \leq C(T_B), \quad \forall T_A, T_B \in [0, \infty] \quad (3)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C(T) = C_0 \quad (4)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} C(T) = \infty \quad (5)$$

donde T_A y T_B representan dos valores cualesquiera de la amplitud de intervalo de tolerancia, $C(T)$ la función de coste por pieza asociada a la operación y C_0 el valor de coste de producción en el supuesto de que la especificación asociada a la operación no lleve asociado ningún valor de tolerancia.

La primera condición (3) establece que la función C es monótona no creciente en el intervalo de tolerancia válido (campo de valores positivos). La segunda condición (4) establece un valor asintótico del coste C_0 , correspondiente al coste de la operación en el supuesto de que la magnitud asociada a la especificación no requiera un intervalo de tolerancia o bien la condición equivalente de que dicho intervalo presente una amplitud lo suficientemente grande que permita dar por válida cualquiera de las piezas fabricadas en las condiciones de trabajo. Se tiene pues que C_0 comprende la contribución al coste de la pieza de todos los factores productivos excepto el originado por la tolerancia especificada. Finalmente, la tercera condición (5) establece la imposibilidad en términos de coste de fabricar una pieza con un valor exacto ($T=0$) de su magnitud asociada.

La figura 2 recoge gráficamente la expresión de los modelos propuestos por Speckhart y Spotts-Hillier. Los datos de intercomparación proceden del trabajo de Dieter (2000). En dicho trabajo, su autor definió una curva de coste-tolerancia genérica cuyos valores, a pesar de haber sido inicialmente propuestos a título orientativo, han conseguido un grado de aceptación considerable. Los coeficientes de ambas curvas se han ajustado por mínimos cuadrados a los puntos de la curva de Dieter cuyos valores aparecen recopilados en la Tabla 2.

Figura 2: Curvas coste-tolerancia según Speckhart y Spotts-Hillier

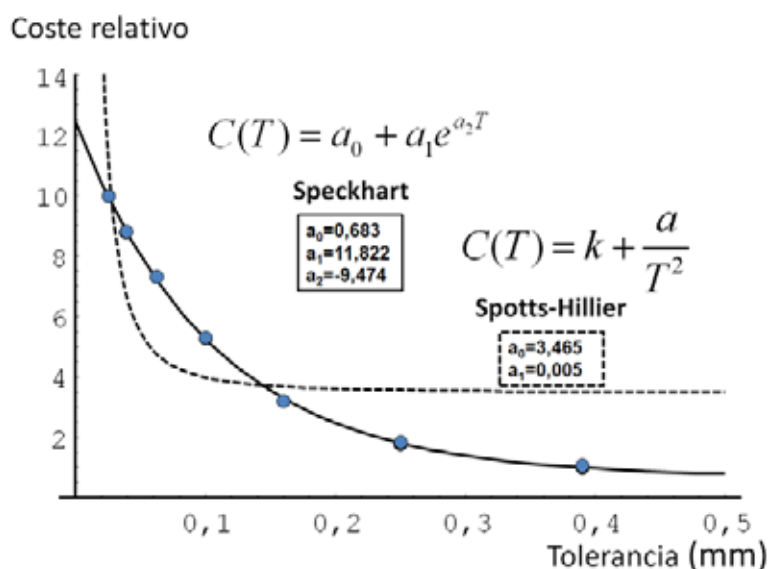


Tabla 2: Coste relativo para calidades IT7-IT13 obtenido a partir de Wu (1988) y Dieter (2000)

Calidad ISO	IT7	IT8	IT9	IT10	IT11	IT12	IT13
Tolerancia (mm)	0,025	0,039	0,062	0,100	0,160	0,250	0,390
Coste relativo	10,00	8,80	7,33	5,29	3,20	1,79	1,00

En este punto, la diferenciación entre unos modelos y otros reside en la expresión matemática empleada para función del coste $C=C(T)$ y en la determinación de los coeficientes que caracterizan dicha función, que normalmente se intentan obtener a partir de datos coste-tolerancia disponibles en la práctica y no contaminados por los efectos de factores extrínsecos. En la mayoría de los modelos contemplados, la elección de la expresión matemática de la función $C=C(T)$ no se justifica debidamente y se realiza simplemente por comodidad o adecuación al tratamiento matemático que vaya a sufrir a posteriori. Por otro lado, para la determinación de la curva coste-tolerancia a partir de un registro histórico de datos (data logging) se precisa un número relativamente elevado de datos de coste-tolerancia a fin de poder aplicar con una cierta fiabilidad los modelos de estimación de los coeficientes que definen las funciones de coste, lo cual suele suponer una complejidad operativa en la práctica debido a la dificultad que normalmente presenta el acceso a este tipo de datos.

El método que se propone a continuación para la determinación de la curva $C = C(T)$ intenta minimizar estos inconvenientes y proporciona, no sólo una modelización teórica de la curva coste-tolerancia, sino una operativa de aplicación que pueda ser implementada en cualquier situación práctica combinando sencillez y fiabilidad. Una de sus principales ventajas es la de estar basado en una información obtenible directamente del propio proceso. De esta forma se garantiza la fiabilidad y la validez de los datos y se puede llegar a resultados aplicables en la práctica productiva. Su planteamiento se realiza mediante la formulación de las siguientes hipótesis:

- H1: El proceso consta de una sola *operación elemental* en la que la especificación de diseño establece un intervalo de tolerancia T asociado a la magnitud M obtenida en la operación.

H2: Se conoce la función de densidad $f(x)$ o la función de distribución $F(x)$ de los valores obtenidos en la producción la magnitud M en las condiciones productivas consideradas, siendo su expresión de la forma

$$p(M \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (6)$$

donde $p(M \leq x)$ representa la probabilidad de que la magnitud M sea menor o igual que un determinado valor x

H3: Los factores productivos no están sometidos a causas especiales de variación y por tanto la operación se encuentra bajo control, sin que la función de distribución $F(x)$ asociada a la obtención de la magnitud M sufra modificaciones durante el periodo considerado.

H4: Se dispone de información suficiente como para calcular el coste de producción de una pieza C_0 en las condiciones de realización de la operación e independientemente del valor de la tolerancia T asociada a la operación. Dicho coste tiene el mismo valor para todas las piezas fabricadas.

H5: Las piezas defectuosas (fabricadas fuera del intervalo de tolerancia) no son recuperables, o bien su recuperación equivale en términos de coste a la realización de una nueva operación.

A partir de estas hipótesis, es posible determinar el porcentaje α de piezas correctas (acordes con el intervalo de tolerancia) que se obtendrán cuando se fabrica una serie de piezas empleando los recursos productivos considerados. En efecto, teniendo en cuenta la hipótesis H2, α puede determinarse mediante la expresión.

$$\alpha = p(LIT \leq M < LST) = \int_{LIT}^{LST} f(t)dt \quad (7)$$

donde LIT y LST representan respectivamente los límites inferior y superior del intervalo de tolerancia. α no experimentará modificaciones durante el desarrollo del proceso tal y como establece la hipótesis H3.

Se tiene pues que para un cierto número n_f de piezas fabricadas, sólomente se pueden considerar correctas (dentro del intervalo de tolerancia T) una cantidad n_p de piezas tales que

$$n_p = \alpha n_f \quad (8)$$

Por tanto, el número de piezas n_f que sería necesario fabricar para obtener n_p piezas correctas sin modificar los recursos productivos se obtendrá mediante la expresión

$$n_f = n_p / \alpha. \quad (9)$$

La diferencia $n_f - n_p$ representa el número de piezas defectuosas que se habrán producido hasta conseguir n_p piezas correctas. En estas condiciones, el coste C_{np} para la obtención de n_p piezas correctas se obtendrá a partir de la expresión

$$C_{np} = C_0 n_f = C_0 n_p / \alpha \quad (10)$$

donde C_0 , según establece la hipótesis H4 representa el coste que supone la producción de una pieza en las condiciones de realización de la operación. El coste real C para la

obtención de una pieza correcta se obtendrá dividiendo el coste total de la serie entre el número de piezas correctas, es decir,

$$C = C_{np} / n_p = C_0 / \alpha \quad (11)$$

La generalización a la obtención de n especificaciones sujetas a intervalos de tolerancia T_i resulta inmediata sin más que aplicar la expresión (6) a cada una de las especificaciones, llegándose a la expresión

$$C = \sum_{i=1}^n c_i = \sum_{i=1}^n c_{i0} / \alpha_i \quad (12)$$

4. Resultados

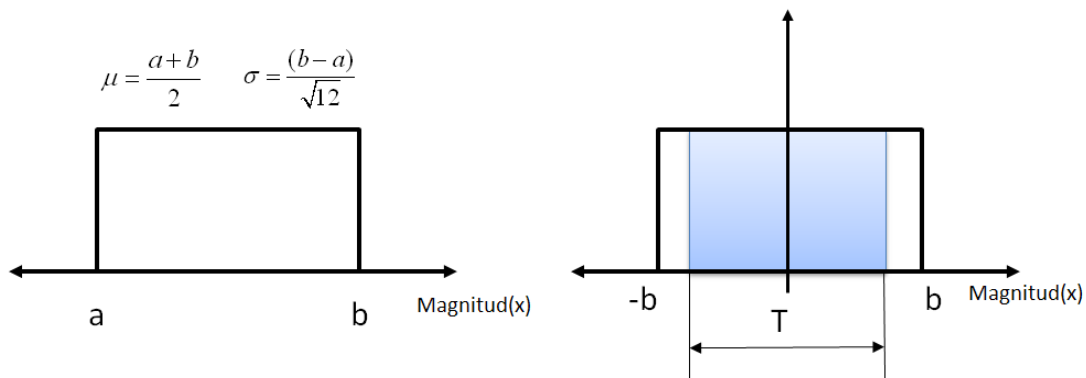
La metodología planteada puede ser aplicada a cualquier tipo de producción ya que solamente requiere conocer la distribución de la magnitud o magnitudes consideradas en las piezas fabricadas. A continuación se presenta su aplicación sobre varias distribuciones habitualmente utilizadas en ingeniería de producción.

4.1 Distribución Uniforme

La principal ventaja que presenta esta distribución es su sencillez matemática y su principal inconveniente proviene de la discontinuidad que se produce en sus extremos. La distribución uniforme es útil cuando la información disponible acerca de la población es escasa, ya que de lo contrario es preferible recurrir a otras distribuciones que se ajusten mejor a los datos observados.

Sea pues una distribución uniforme cuyos valores extremos son a y b tal y como muestra la figura 3.

Figura 3: Parámetros de la distribución uniforme



La media μ y la desviación típica σ de la población pueden determinarse a partir de las expresiones

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}} \quad (13)$$

En particular es frecuente que el valor de la media sea ajustable, por lo que imponiendo la condición $\mu=0$, se obtiene que $a=-b$. Si se trabaja con un intervalo de tolerancia de amplitud T , centrado en la media, la proporción de piezas correctas α vendrá dada por la expresión

$$\alpha = \frac{T}{2b} \quad \text{si } T \leq 2b \quad \alpha = 1 \quad \text{si } T > 2b \quad (14)$$

que se corresponde con el área sombreada en la figura 3 para valores de T menores que 2b. Teniendo en cuenta la expresión (11) y sustituyendo el valor de b por el de σ , se tiene que

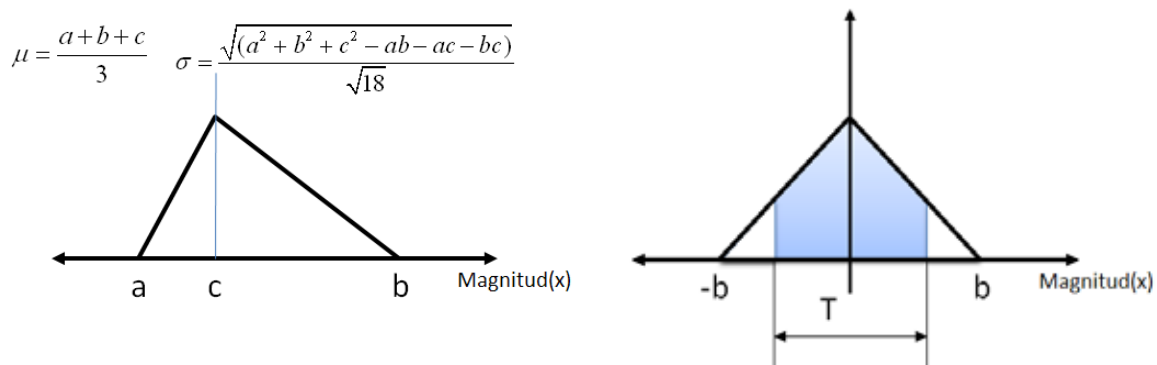
$$C_{uniforme} = \frac{C_0 \sqrt{3}}{\left(\frac{T}{2\sigma}\right)} \quad \text{si } \frac{T}{2\sigma} \leq \sqrt{3} \quad C_{uniforme} = C_0 \quad \text{si } \frac{T}{2\sigma} \leq \sqrt{3} \quad (15)$$

cuya representación gráfica se encuentra en la figura 6.

4.2 Distribución Triangular

La distribución triangular es una aproximación lineal a la distribución normal y responde mejor que la distribución uniforme a una realidad productiva en la que los valores centrales del intervalo presentan una mayor frecuencia de aparición. Sea una distribución triangular caracterizada por los parámetros a, b, y c tal y como muestra la figura 4.

Figura 4: Parámetros de la distribución triangular



La media μ y la desviación típica σ de la población pueden determinarse a partir de las expresiones

$$\mu = \frac{a+b+c}{3} \quad \sigma = \frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}}{\sqrt{18}} \quad (16)$$

Imponiendo la condición $\mu=0$ (media ajustable), se obtiene que $a=-b$ y que $c=0$. Si se trabaja con un intervalo de tolerancia de amplitud T, centrado en la media, la proporción de piezas correctas α vendrá dada por la expresión

$$\alpha = 1 - \frac{1}{b^2} \left(b - \frac{T}{2} \right)^2 \quad \text{si } T \leq 2b \quad \alpha = 1 \quad \text{si } T > 2b \quad (17)$$

que se corresponde con el área sombreada en la figura (b) para valores de T menores que 2b. Teniendo en cuenta la expresión (11) y sustituyendo el valor de b por el de σ , se tiene que

$$C_{triangular} = \frac{C_0 \sqrt{6}}{\left(\frac{T}{2\sigma}\right) \left(2 - \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{T}{2\sigma}\right)\right)} \quad si \quad \frac{T}{2\sigma} \leq \sqrt{6} \quad C_{triangular} = C_0 \quad si \quad \frac{T}{2\sigma} \geq \sqrt{6} \quad (18)$$

cuya representación gráfica se encuentra en la figura 6.

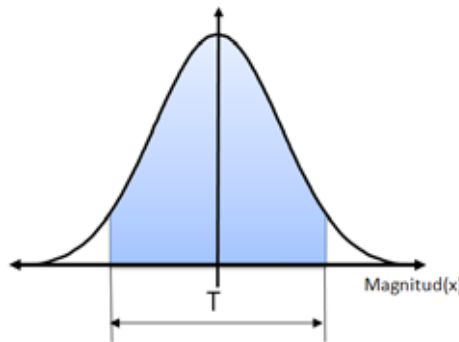
4.3 Distribución Normal

Finalmente se presenta el resultado de aplicar la metodología propuesta a la distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Centrando la media en $\mu=0$, y trabajando con un intervalo de tolerancia T centrado respecto a la media, la proporción de piezas correctas α vendrá dada por la expresión

$$\alpha = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \quad (19)$$

que se corresponde con el área sombreada en la figura 5.

Figura 5: Parámetros de la distribución normal



Teniendo en cuenta la expresión (11) y llamando $\Phi(x)$ a la función de distribución de la Normal $N(0;1)$ y $\text{Erf}(x)$ a la función de error definidas como

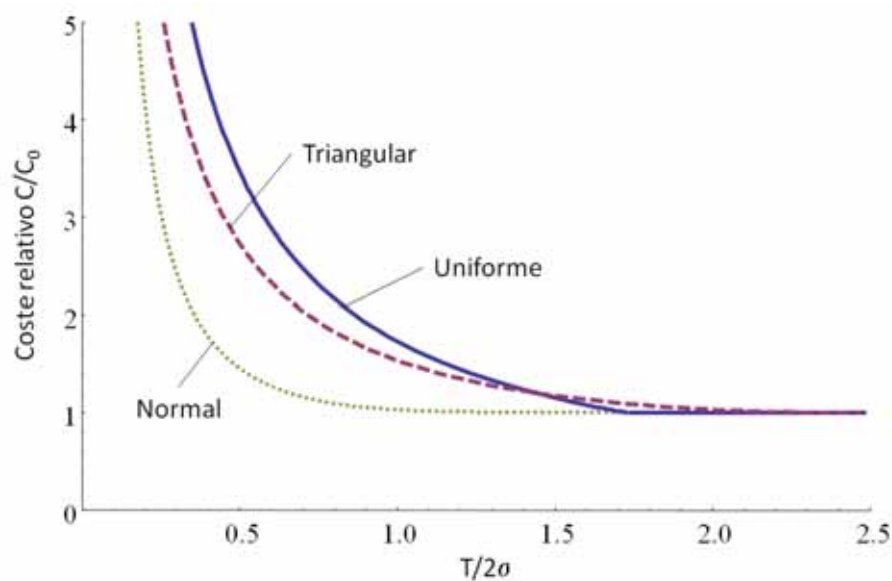
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (20)$$

el coste unitario por pieza podrá expresarse como

$$C_{normal} = \frac{C_0}{2\Phi\left(\frac{T}{2\sigma}\right) - 1} = \frac{C_0}{\text{Erf}\left(\frac{T}{2\sqrt{2}\sigma}\right)} \quad (21)$$

Cuya representación gráfica se recoge en la figura 6. En dicha figura las curvas coste-tolerancia para cada una de las operaciones elementales consideradas han sido realizadas en el supuesto de que todas ellas tienen la misma variabilidad. La determinación de la variabilidad debe hacerse prestando gran atención a todos los factores productivos involucrados en la operación ya que cualquier modificación de los mismos puede producir cambios significativos, aun tratándose se de la misma máquina. En el trabajo (Sanz-Lobera *et al*, 2010) puede encontrarse otro ejemplo de aplicación de esta metodología con una orientación más ligada a las características de los equipos que intervienen en el proceso.

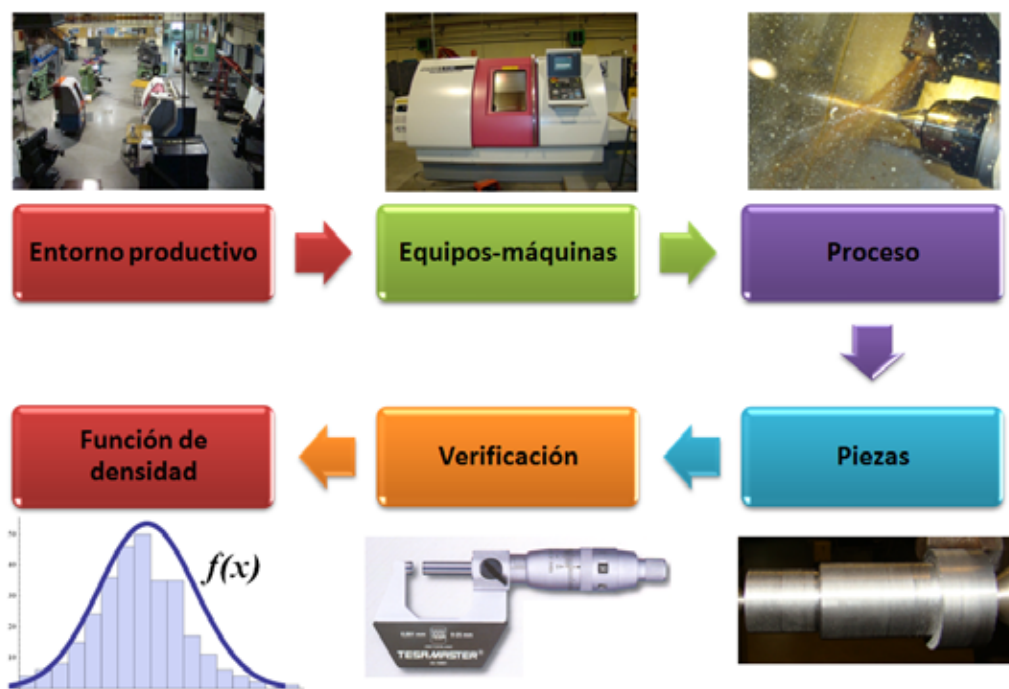
Figura 6: Curvas coste-tolerancia basadas en el proceso de producción



4.4 Ejemplo de aplicación

A fin de validar sobre una situación productiva real el modelo de curvas coste-tolerancia propuesto se presenta a continuación el siguiente caso realizado sobre un torno de control numérico existente en el Laboratorio de Fabricación y Organización de la ETSI Aeronáuticos-UPM de acuerdo con el esquema mostrado en la figura 7. A efectos de no incorporar complejidades ajenas al modelo se va a suponer que se trabaja en un proceso consistente en la fabricación de ejes con un diámetro nominal de 30 mm.

Figura 7: Esquema del ejemplo de aplicación



El primer paso a seguir según el modelo propuesto es la determinación de la curva que representa la distribución de la población de piezas fabricadas en las condiciones objeto de estudio. En la aplicación de los modelos existentes, descritos en la Tabla 1, el principal inconveniente se produce en este paso y en la dificultad de obtener unos valores para los coeficientes a_i que definen la curva de coste-tolerancia que representen la realidad productiva del proceso. De hecho, en los ejemplos que se presentan acompañando a los diferentes modelos, se utilizan unos valores prefijados para los coeficientes a_i , sin indicación alguna acerca de su procedencia o de cuál ha sido el método empleado en su determinación.

Para la determinación de la curva de distribución es necesario fabricar un número suficientemente grande de piezas de forma tal que se pueda realizar una representación gráfica de su distribución. En el ejemplo propuesto se procedió a la fabricación de un total de 300 piezas, que posteriormente fueron medidas con un micrómetro milesimal, obteniéndose los resultados recogidos en la Tabla 3 cuya representación grafica aparece en la figura 7. A la vista de los mismos y asumiendo los valores muestrales como valores poblacionales, se concluyó que la población de piezas podía modelizarse mediante una distribución normal de media 30.001 mm y desviación típica 0.0135 mm. Debe indicarse que si las condiciones productivas no sufren variaciones significativas puede asumirse que la variabilidad del proceso es del mismo orden de magnitud y aprovechar los resultados obtenidos sin necesidad volver a fabricar una nueva serie de piezas.

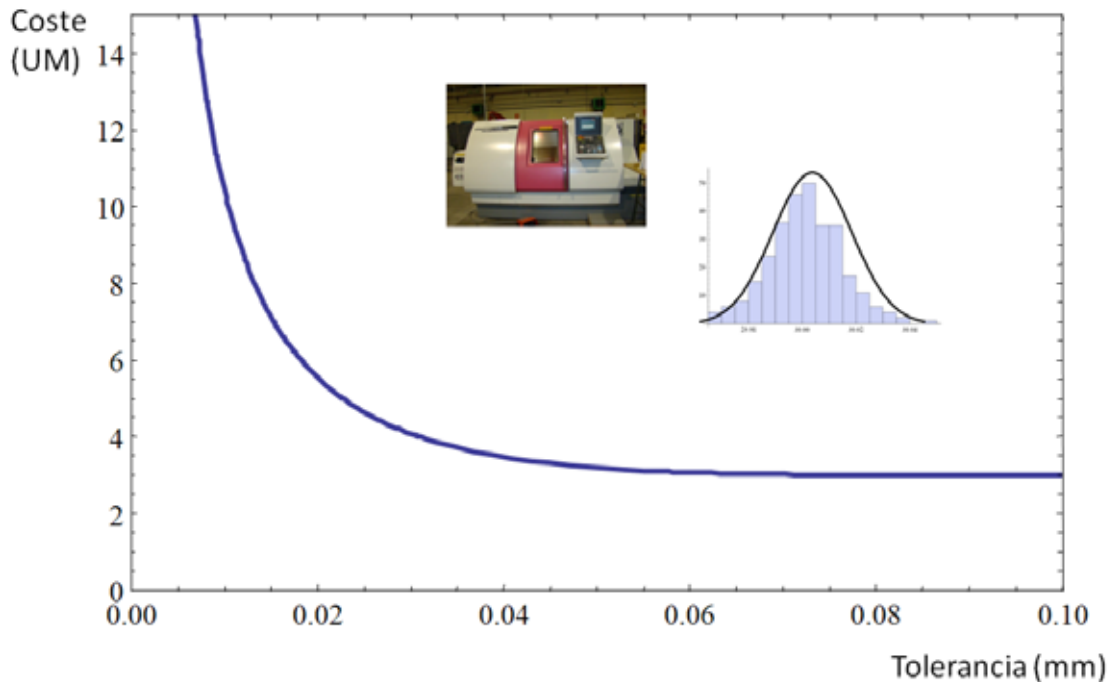
El coste por pieza se estableció en un valor igual a 3 UM (UM=Unidades Monetarias) y en su determinación se tuvieron en cuenta el coste de material, el de mano de obra, el de amortización de los equipos y el de consumo energético. En este sentido cabe reseñar que el modelo admite la incorporación de cualquier método de costes previamente establecido ya que como entrada solamente necesita el valor numérico del coste unitario por pieza.

Tabla 3. Valores medidos en las 300 piezas fabricadas (mm)

30.018	30.011	29.990	30.038	29.982	30.003	30.012	29.997	29.990	30.005
29.981	29.990	29.989	29.990	30.000	30.023	29.994	29.988	29.995	30.016
29.993	30.011	30.030	29.995	29.995	30.003	29.995	29.995	29.995	29.969
30.027	29.998	30.011	30.010	30.025	30.004	29.990	29.985	29.998	30.010
30.023	30.000	29.984	29.997	29.997	29.999	30.009	29.991	30.013	29.994
29.998	30.008	30.006	30.000	29.994	30.002	29.996	30.002	30.009	30.012
30.022	29.991	30.010	29.997	29.997	29.990	30.017	30.014	29.992	29.993
30.003	30.000	30.013	29.974	30.031	29.988	30.003	29.981	29.994	30.003
29.992	29.970	30.022	29.989	30.013	29.999	30.018	30.008	30.000	29.984
30.013	29.989	29.974	29.974	30.017	30.012	30.004	29.994	29.967	29.997
29.967	30.006	30.000	30.008	29.970	29.990	30.014	30.008	30.007	29.987
30.018	30.046	30.001	30.002	30.001	30.011	29.984	29.989	30.016	30.018
29.987	30.003	29.995	30.015	30.002	29.984	29.986	29.997	30.007	30.002
30.014	30.025	30.010	30.009	30.013	29.988	29.996	30.000	29.990	29.987
30.007	30.003	30.002	29.992	29.983	29.996	29.993	29.992	30.035	30.019
30.025	30.009	29.986	30.003	30.013	29.995	30.001	29.995	29.990	29.990
30.002	30.015	30.012	30.002	29.988	29.996	30.003	30.004	30.013	29.975
30.026	29.997	29.975	30.000	30.008	30.004	30.000	30.009	30.021	29.981
29.999	30.014	29.991	30.004	30.006	29.999	29.993	30.006	30.010	29.997
30.001	30.015	30.004	30.012	30.010	30.009	29.994	30.001	30.005	29.972
30.017	30.018	30.018	30.024	29.968	30.004	29.996	29.998	30.000	30.011
29.996	29.978	30.008	30.011	30.021	29.996	30.002	29.984	30.011	29.996
30.005	30.016	30.021	29.997	30.000	30.010	30.003	29.997	29.995	29.997
29.990	29.996	30.012	29.976	30.002	30.000	30.006	29.988	29.987	30.009
29.989	29.999	30.009	29.996	30.010	29.993	30.003	30.014	29.992	29.988
29.990	29.984	29.988	29.996	30.032	30.004	30.007	30.030	30.022	29.982
30.007	29.995	29.977	29.986	29.982	30.004	30.008	30.005	29.988	29.985
29.976	29.991	29.992	30.014	29.989	29.984	29.995	29.976	30.007	29.990
29.978	29.994	29.998	29.988	29.993	30.011	30.007	30.005	30.002	29.983
30.011	30.009	30.028	30.007	30.001	29.995	30.024	30.020	30.016	30.002

El resultado final tras la aplicación del modelo propuesto es el representado en la Figura 8. En ella se observa cuál es la relación entre el coste y la tolerancia para el caso concreto planteado. Si la tolerancia dimensional se mantiene en un valor próximo a 6σ , es decir, en el entorno de $T=0.08$ que se aproxima a una calidad IT 10 según la norma ISO (ISO, 2010) el coste por pieza está próximo a las 3UM. A medida que el intervalo de tolerancia se reduce, dicho coste se incrementa, obteniéndose unos valores de 3.48 UM para $T=0.04$, 4.90 UM para $T=0.03$ y 5.54 UM para $T=0.2$.

Figura 8: Resultados coste–tolerancia del ejemplo de aplicación



5. Conclusiones

Tanto en el ámbito de la Ingeniería de Proyectos como en el de la Ingeniería de Procesos de Producción, el establecimiento de la relación coste-tolerancia en la obtención de una determinada magnitud asociada a una especificación de diseño, es una información de vital importancia para poder establecer un valor competitivo del producto fabricado. Pese a ello, la mayor parte de los trabajos relacionados con el tema no prestan suficiente atención a su determinación o proponen modelos teóricos cuya aplicabilidad práctica resulta difícil de ser implementada. Ello es debido en parte a la baja fiabilidad de los datos de partida en los que se basan otros modelos, ya que estos datos no son siempre fácilmente accesibles o bien se encuentran desfasados como consecuencia de las frecuentes fluctuaciones que experimentan los mercados de materias primas, de mano de obra y de logística. En el método presentado se reducen o eliminan estos inconvenientes, ya que los datos de partida se obtienen a partir de informaciones actuales directamente ligadas a las condiciones operativas del proceso y su aplicación solo requiere el conocimiento de un único valor del binomio coste-tolerancia. De esta forma se consigue una sencillez de aplicación práctica, un amplio campo de aplicación y una alta fiabilidad de los resultados obtenidos, que suponen una comparación ventajosa frente a otros métodos similares. El método es asimismo fácilmente generalizable para situaciones productivas en las que se concurren varias especificaciones sobre una misma pieza.

6. Referencias

- Bennett G, Gupta LC (1969) Least cost tolerances I, *Int J Prod Res* 8(1): 65-74.
- Chase KW, Greenwood WH, Loosli BG, Hauglund LF (1990) Least Cost Tolerance Allocation for Mechanical Assemblies with Automated Process Selection. *Manuf Rev* 3:49-59.
- Dieter GE (2000) Engineering Design: A Materials and Processing Approach. McGraw-Hill.
- Diplaris SC, Sfantsikopoulos MM (2000) Cost-tolerance function. A new approach for cost optimum machining accuracy, *Int J, Adv Manuf Tech* 16(1):32-38
- Dong Z, Hu W and Xue D (1994) New production cost-tolerance models for tolerance synthesis, *J Eng Ind, ASME*, 116 199-205.
- Etienne A, Dantan JY, Siadat A, Martín P (2007) Cost estimation for tolerance allocation, *10th CIRP Conf Comp Aided Tolerancing Specification and Verification for Assemblies*, Erlangen.
- Hsieh KL (2006) The study of cost-tolerance model by incorporating process capability index into product lifecycle cost. *Int J Adv Manuf Tech* 28:638-642
- ISO 286-1:2010.Geometrical product specifications (GPS) - ISO code system for tolerances on linear sizes - Part 1: Basis of tolerances, deviations and fits. International Organization for Standardization (2010).
- Kusiak A, Feng CX (1995) Deterministic tolerance synthesis: a comparative study. *Computer-Aided Des* 27:759-768.
- Michael W, Siddall JN (1981) The optimization problem with optimal tolerance assignment and full acceptance, *J Mech Des, ASME*, 103:842-848.
- Sanz-Lobera A, Sebastián MA, Pérez JM (2010) New cost-tolerance model for mechanical part design *Int J Adv Manuf Technol* 51:421-430.
- Speckhart FH (1972) Calculation of tolerance based on a minimum cost approach. *J Eng Ind* May:447-453.
- Spotts MF (1973) Allocation of tolerances to minimize cost of assembly. *J Eng Ind* 95:762-764.
- Sutherland GH, Roth B (1975) Mechanism design: accounting for manufacturing tolerances and costs in function generating problems, *J Eng Ind, ASME*, February 283-286.
- Wu Z, ElMaraghy WH, ElMaraghy HA (1988) Evaluation of cost-tolerance algorithms for design tolerance analysis and synthesis, *Manuf Rev ASME*, 1-3 168-179.